# CURSO TÉCNICO EM FINANÇAS

PROFESSOR (A): Jorge Augusto

CONTEÚDO: Capitalização Contínua

DATA: 29/09/2020

# Plano de Aula

## Capitalização Contínua.

- Fundamentos da capitalização contínua ou juros contínuos.
- Capitalização contínua: valor futuro.
- Capitalização contínua: valor presente.
- Taxa de juros instantânea.
- Prazo.

# Objetivos

- Conhecer os fundamentos da capitalização contínua ou juros contínuos, da capitalização contínua: valor futuro, da capitalização contínua: valor presente, da taxa de juros instantânea e do prazo..

# Atividade – Capitalização Contínua

1. Um investidor aplicou R$ 100.000,00 à taxa instantânea pelo prazo de quatro anos e resgatou R$ 137.712,78. Qual foi a taxa instantânea da aplicação?

2. Uma nota promissória no valor de R$ 5.000,00, com vencimento em 28 de maio, é descontada dois meses antes do vencimento, à taxa de desconto bancário simples de 2,5% a.m. O banco cobra uma taxa de 0,5% correspondente a despesas bancárias. Qual foi o valor líquido recebido?

**Antes de iniciarmos o tema de hoje, vamos resolver a Atividade Capitalização Simples e Composta**

**Prof. Jorge Augusto Costa**

**E-mail: jct.jac2705@gmail.com**

**Celular: 86 9.9851-5570 TIM WhatsApp e Telegram**

# Solução da Atividade Capitalização Simples e Composta

# Atividade – Capitalização Simples

1. Suponhamos que se tome emprestada a quantia de $1.000,00 pelo prazo de 2 anos e à taxa de 10% ao ano. Qual será o valor a ser pago como juro?

**Solução**

**Capital inicial (C) = 1.000,00**

Taxa de juros (i) = 10%

Número de períodos (n) = 2 anos

Trabalhando com a taxa de juros na forma unitária, teremos o juro do primeiro ano como sendo:

$J_1 = 1.000,00 \times 10/100 \times 1 = 100,00$

No segundo ano, teremos:

$J_2 = 1.000,00 \times 10/100 \times 1 = 100,00$

O juro total será a soma do juro devido no primeiro ano ( $J_1$ ) mais o juro devido no segundo ano ( $J_2$ )

$J = J_1 + J_2$

$J = 100,00 + 100,00 = 200,00$

**J = 200,00**

# Atividade – Capitalização Simples

2. Considerando os dados do exercício 1 acima calcule o montante, ou seja, qual é o montante de um capital de $1.000,00 aplicado à taxa de 10%a.a., pelo prazo de 2 anos?

capital inicial (C) = 1.000,00

Taxa de juros (i) = 10%

Número de períodos (n) = 2 anos

E sendo:

$M = C(1+in)$

Substituindo os valores, temos:

$M = 1000\ (1 + 10/100 \times 2)$

$M = 1000\ (1 + 0,20)$

$M = 1.200,00$

# Atividade – Capitalização Simples

3. Verifique se as taxas de 5% ao trimestre e de 25% ao ano são proporcionais.

**Solução**

Temos:

$I_1$ = 5% a.t. = 0,05 a.t.

$I_2$ = 25% a.a. = 0,25 a.a.

$N_1$ = 3 meses

$N_2$ = 12 meses

Como: $\dfrac{i_1}{I_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$

Substituindo

Os valores: $\dfrac{0{,}05}{0{,}25} = \dfrac{3}{12}$

Notamos que não são grandezas proporcionais, porque o produto dos meios (0,25 x 3) = 0,75 é igual ao produto dos extremos (0,05 x 12) = 0,6.

**Logo, as taxas não são proporcionais.**

# Atividade – Capitalização Simples

4. Verifique se as taxas de 5% ao trimestre e de 20% ao ano são proporcionais.

**Solução**

Temos:

$I_1$ = 5% a.t. = 0,05 a.t.

$I_2$ = 20% a.a. = 0,25 a.a.

$N_1$ = 3 meses

$N_2$ = 12 meses

Como: $\dfrac{i_1}{I_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$

Substituindo

Os valores: $\dfrac{0{,}05}{0{,}20} = \dfrac{3}{12}$

Notamos que não são grandezas proporcionais, porque o produto dos meios (0,20 x 3) = 0,60 é igual ao produto dos extremos (0,05 x 12) = 0,60

**Logo, as taxas são proporcionais.**

# Atividade – Capitalização Simples

5. Considere que uma pessoa possui hoje a quantia de $10.000,00. Qual será o valor futuro se a pessoa aplicar esta importância a taxa de 5% ao mês, daqui a 3 meses?

**Solução**

Temos: M = C (1 + In)

Onde M + ?

C = 10.000,00

I = 0,05

n = 3 meses

Logo:

M = 10.000 (1 + 0,05 x 3 )

M = 10.000 (1,15)

M = 11.500,00

O valor futuro será de $11.500,00 daqui a 3 meses

# Atividade – Capitalização Composta

1. Qual o juro pago no caso do empréstimo de $2.000,00 à taxa de juros compostos de 2% ao mês pelo prazo de 10 meses?

**Solução**

Dados:

$C_0 = 2.000$

$i = 2\%$ a.m.

$n = 10$ meses

Temos que:

$J_n = C_0 [(1 + i)^n - 1]$

Substituindo:

$J_n = 2.000 [(1 + 0.02)^{10} - 1]$

$J_n = 2.000 [(1,02)^{10} - 1]$

$J_n = 2.000 [(0.21899)]$

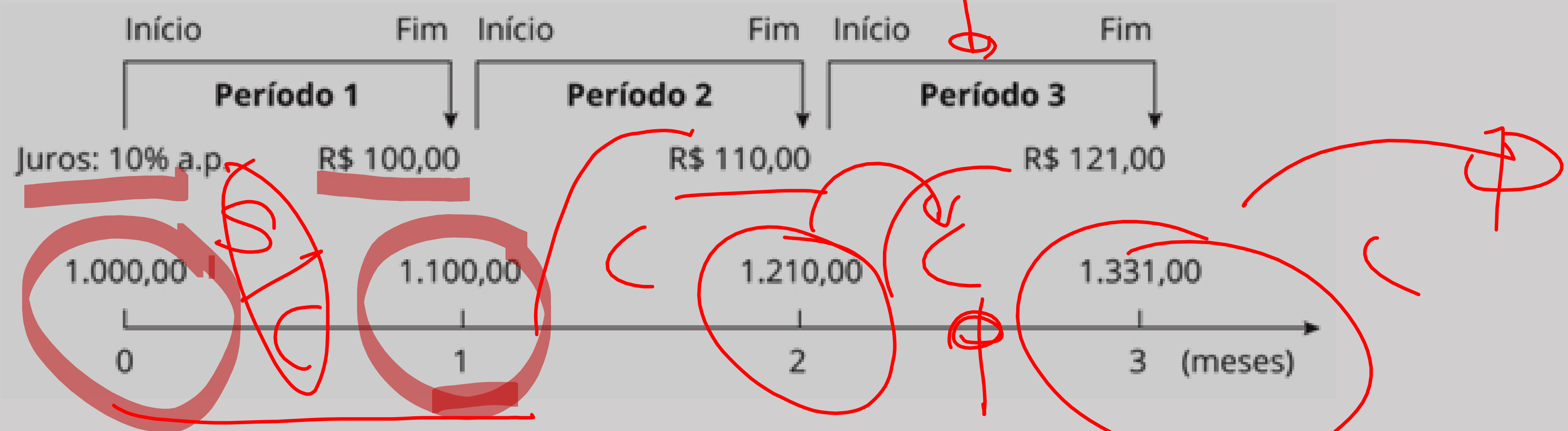
$J_n = 437,98$

# *Catalização Contínua*

# *Fundamentos da capitalização contínua ou juros contínuos.*

# Fundamentos da capitalização contínua ou juros contínuos.

Já estudamos juros simples e juros compostos. De acordo com os conceitos utilizados até aqui, as taxas de juros abrangem um período (dia, mês, bimestre, trimestre, semestre, ano etc.) e são devidas sempre ao final de cada período. Essa forma de cálculo de juros é uma simplificação, segundo os matemáticos.




Diferentemente da capitalização simples ou da capitalização composta, em que os juros são devidos ao final de cada período, existe uma forma de capitalização em que os juros ocorrem a cada instante infinitesimal, conhecida como capitalização contínua ou juros contínuos.

# Fundamentos da capitalização contínua ou juros contínuos.

No Brasil, as operações mais comuns de mercado estão sujeitas ao regime de capitalização composta, mas em outros países, como nos Estados Unidos, é frequentemente utilizado o regime de capitalização contínua (KASSAI, 2005).

Determinado valor pode sofrer capitalizações anuais, semestrais, trimestrais, diárias, horárias, por minuto, por segundo, ou por bilionésima parte de um segundo, até chegar à menor unidade de tempo chamada “infinitésimo”.

E a taxa correspondente ao infinitésimo de tempo é a taxa infinitesimal ou taxa de juro instantânea, que é a base para o regime de capitalização contínua, segundo o autor.

# Fundamentos da capitalização contínua ou juros contínuos.

## Processo de Capitalização Contínua

Em finanças e engenharia econômica, a capitalização contínua é utilizada para a avaliação de opções, derivativos, projetos de investimentos, geração de lucro, taxa de reprodução de espécies animais (peixes, camarões), taxa de crescimento de culturas vegetais (eucalipto, pinus), desgaste de equipamentos etc.

Por esse conceito, segundo Cassaratto Filho e Kopittke (2010), uma taxa nominal iN, capitalizada continuamente, produzirá uma taxa efetiva anual (ia) superior à taxa nominal.

20% Nominal → 26,8% a

# Fundamentos da capitalização contínua ou juros contínuos.

## Processo de Capitalização Contínua

→ 24% a.a. Nominal

**Fórmula**

$24/12 \rightarrow 2\% \rightarrow \left(\frac{2}{100} + 1\right)^{12}$

$$\boxed{i_{ef} = \left(1 + \frac{i_{nom}}{n}\right)^{n} - 1}$$

Capitalização Contínua 10% ao período

**Juros: 10% a.p.**

**C = 1.000,00** **M 1 = 1.100,00**

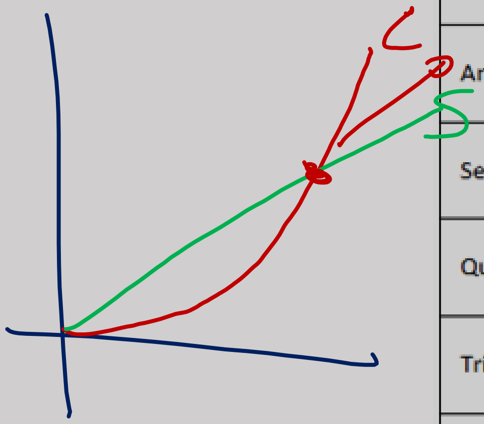
**Período** 0 1

| | Início — Fim | JUROS |
|---|---|---|
| Período com 1 capitalização | Período 1 | R$ 100,00 |
| Período com 4 capitalizações | | R$ 103,81 |
| Período com 8 capitalizações | | R$ 104,49 |
| Período com 16 capitalizações | | R$ 104,83 |
| Período com 1.000 capitalizações | ...1.000... | R$ 105,17 |
| Período com 100.000 capitalizações | ...100.000... | R$ 105,17 |
| Período com *n* capitalizações | ... *n* ... | R$ ... |

# Fundamentos da capitalização contínua ou juros contínuos.

## Taxa de Juro Instantânea

A taxa instantânea (ou taxa infinitesimal) é a base da capitalização contínua. As taxas efetivas anuais do quadro a seguir foram calculadas com base em taxa nominal de 10% a.a. Observa-se que à medida que se capitaliza em período cada vez menor, a taxa anual efetiva aumenta, até atingir o limite dado pela taxa instantânea.



| Unidade de tempo | Número de capitalização no ano | Cálculo * | Taxa anual efetiva, em % |
|---|---|---|---|
| Ano | 1 | $\left(1+\frac{0,10}{1}\right)^{1}-1$ | 10,0000% |
| Semestre | 2 | $\left(1+\frac{0,10}{2}\right)^{2}-1$ | 10,2500% |
| Quadrimestre | 3 | $\left(1+\frac{0,10}{3}\right)^{3}-1$ | 10,3370% |
| Trimestre | 4 | $\left(1+\frac{0,10}{4}\right)^{4}-1$ | 10,3813% |
| Bimestre | 6 | $\left(1+\frac{0,10}{6}\right)^{6}-1$ | 10,4260% |
| Mês | 12 | $\left(1+\frac{0,10}{12}\right)^{12}-1$ | 10,4713% |
| Dia | 365 | $\left(1+\frac{0,10}{365}\right)^{365}-1$ | 10,5156% |
| Hora | 8.760 | $\left(1+\frac{0,10}{8.760}\right)^{8.760}-1$ | 10,5170% |
| Minuto | 525.600 | $\left(1+\frac{0,10}{525.600}\right)^{525.600}-1$ | 10,5171% |
| Segundo | 31.536.000 | $\left(1+\frac{0,10}{31.536.000}\right)^{31.536.000}-1$ | 10,5171% |
| Instantânea | Infinitas | $\left(1+\frac{0,10}{\infty}\right)^{\infty}-1$ | 10,5171% |

# *Capitalização Contínua: Valor Futuro.*

# Capitalização contínua: Valor Futuro.

Tal como no regime de juros compostos, podem ser calculados o valor futuro, o valor presente e a taxa de juros na capitalização contínua.

**Fórmula:** $VF = VP \times e^{i_c \times n}$

e = a constante de Euler cujo valor dessa constante é 2,718281828459..., veja próximo slide.

**Exemplo:**

Um investidor aplicou \$ 100.000 por quatro anos, à taxa de juro instantânea de 8% a.a. Qual o montante que receberá no vencimento?

$$M = 100.000 \times 2{,}718282^{0{,}08 \times 4}$$
$$M = 100.000 \times 2{,}718282^{0{,}32}$$
$$M = 100.000 \times 1{,}3771278$$
$$M = R\$\,137.712{,}78$$

A taxa de juro instantânea de 8% a.a. equivale à taxa de 8,33% a.a. no regime de juros compostos, conforme o seguinte cálculo:

$$i = \left(\frac{137.712{,}78}{100.000}\right)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0{,}0833 = 8{,}33\%\ \text{a.a.}$$

# Capitalização contínua: valor futuro. Curiosidade

A constante (e) foi introduzida por Leonhard Euler em 1727. Ela é utilizado como base dos logaritmos naturais (ln x) e ainda se discute se a escolha dessa letra vem da palavra exponencial ou da palavra Euler:.

O valor da constante (e) é 2,718281828459..., mas o que há de especial nesse valor? Ele é uma representação do infinito ∞ na Lei do Infinito Limitado (Infinitum Limes Canon). Para ser mais preciso, o limite de nossa compreensão quando um número tende ao infinito – lembre-se que infinito não é um número, mas sim uma abstração – não ultrapassa (e) e essa compreensão de limite é simbolizada por:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Mas como se chegou a esse valor de (e) e aquele limite? A explicação vem do estudo dos juros compostos. Veja os detalhes em

https://atitudereflexiva.wordpress.com/2016/05/22/uma-explicacao-sobre-o-valor-da-constante-matematica-e/

# *Capitalização Contínua: Valor Presente.*

# Capitalização contínua: Valor Presente

Com base na equação do valor futuro $VF = VP \times e^{i_c \times n}$ temos:

**Fórmula:** $$VP = \frac{VF}{e^{i_c \times n}}$$

e = a constante de Euler cujo valor dessa constante é 2,718281828459..., veja próximo slide.

**Exemplo:**

Um investidor resgatou R$ 137.712,78 após quatro anos, aplicando à taxa instantânea de 8% a.a. Qual era o valor aplicado?

$$VP = \frac{137.712,78}{2,718282^{0,08 \times 4}}$$

$$VP = \frac{137.712,78}{2,718282^{0,32}}$$

$$VP = \frac{137.712,78}{1,377128} = \text{R\$ } 100.000,00$$

# *Taxa de juros instantânea.*

# Taxa de juros instantânea.

No regime de capitalização contínua, ocorre o pagamento de juro a cada período infinitesimal de tempo, fazendo com que o capital cresça continuamente no tempo à taxa de juro instantânea. A fórmula da taxa instantânea ($i_c$) é a seguinte:

**Fórmula:**

$$i_c = \frac{ln\,(1 + i)}{n}$$

## Exemplo:

Um investidor aplicou R$ 100.000,00 à taxa instantânea pelo prazo de quatro anos e resgatou R$ 137.712,78. Qual foi a taxa instantânea da aplicação?

$$i = \frac{137.712,78}{100.000} - 1 = 0,377128$$

Agora substituindo na fórmula:

$$i_c = \frac{ln\,1,377128}{4}$$

Calculamos o log n de 1,377128:

$$i_c = \frac{0,32}{4} = 0,08 = 8\%\text{ a.a.}$$

# *Prazo.*

# Taxa de juros instantânea.

O prazo da capitalização contínua é calculado com a seguinte fórmula:

**Fórmula:**

$$n = \frac{\ln(1+i)}{i_c}$$

## Exemplo:

Um investidor aplicou R$ 100.000,00 à taxa instantânea de 8% a.a. e resgatou R$ 137.712,78. Quanto tempo o capital ficou aplicado?

$$i = \frac{137.712,78}{100.000} - 1 = 0,377128$$

Agora substituindo na fórmula: (1 + 0,377128) :

$$n = \frac{\ln 1,377128}{0,08}$$

Calculamos o log n de 1,377128:

$$n = \frac{0,32}{0,08} = 4 \text{ anos}$$

**Muito obrigado!**

**Até a próxima.**

**Prof. Jorge Augusto Costa**

**E-mail: jct.jac2705@gmail.com**

**Celular: 86 9.9851-5570 TIM WhatsApp e Telegram**

# Atividade – Capitalização Contínua

1. Um investidor aplicou R$ 100.000,00 à taxa instantânea pelo prazo de quatro anos e resgatou R$ 137.712,78. Qual foi a taxa instantânea da aplicação?

**Solução:**

Fórmula para calcular a taxa instantânea

$$i_c = \frac{ln(1+i)}{n}$$

Substituindo os dados na fórmula temos:

$$i = \frac{137.712,78}{100.000} - 1 = 0,377128$$

$$i_c = \frac{ln(1+i)}{n}$$

$$i_c = \frac{ln\,1,377128}{4}$$

$$i_c = \frac{0,32}{4} = 0,08 = 8\%\text{ a.a.}$$

# Atividade – Capitalização Contínua

2. Uma nota promissória no valor de R$ 5.000,00, com vencimento em 28 de maio, é descontada dois meses antes do vencimento, à taxa de desconto bancário simples de 2,5% a.m. O banco cobra uma taxa de 0,5% correspondente a despesas bancárias. Qual foi o valor líquido recebido?

**Solução:**

$$VA_b = VN\,[1 - (d \times n + h)]$$

$$VA_b = 5.000\,[1 - (0{,}025 \times 2 + 0{,}005)]$$

$$VA_b = 5.000\,[1 - (0{,}05 + 0{,}005)]$$

$$VA_b = 5.000\,[1 - 0{,}055]$$

$$VA_b = 5.000 \times 0{,}995 = R\$\ 4.975{,}00$$

**Muito obrigado!**

**Até a próxima.**

**Prof. Jorge Augusto Costa**

**E-mail: jct.jac2705@gmail.com**

**Celular: 86 9.9851-5570 TIM WhatsApp e Telegram**